



長楕円軌道上フォーメーションフライト の軌道設計と制御に関する一考察

夏目耕一(東京大学大学院)

川口淳一郎(ISAS)

○ 佐伯 孝尚(東京大学大学院)

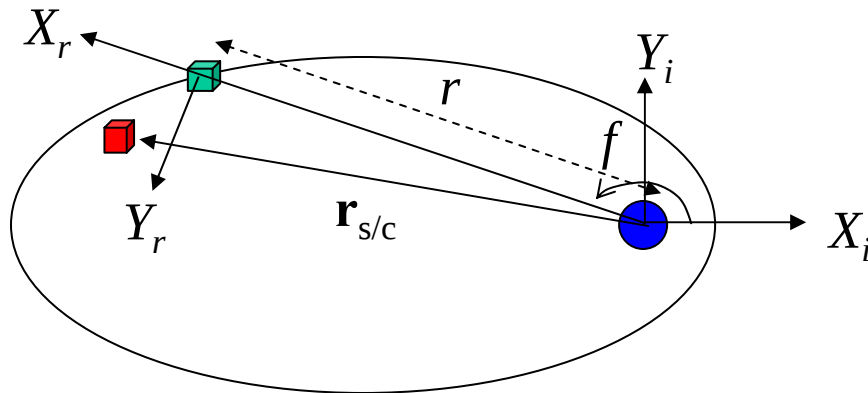
■ 軌道設計

- ◆ 相似な幾何形状を維持する軌道
- ◆ 距離が不変となる軌道
- ◆ 遠地点付近においてプラズマ観測に適する軌道
(GEOTAIL-IIの軌道)

■ 制御

- ◆ 長半径制御
- ◆ 軌道要素を独立に制御する方法

基準軌道近傍の相対運動の線形近似式₁



$$\mathbf{r}_{\text{ref}} = (r, 0, 0)^T$$

基準軌道の軌道要素: $(a, e, 0, 0, 0, f=nt_0)$

近傍衛星の軌道要素: $(a', e', i', \Omega', \omega', f'=n't_0')$

$$a' = a + \delta a, \quad e' = e + \delta e, \quad i' = \delta i, \quad \Omega' = \Omega, \quad \omega' = \omega, \quad t_0' = t_0 + \delta t_0$$

$$\mathbf{r}_{s/c} = W_Z(-f)W_Z(\Omega)W_X(\delta i)W_Z(\omega + f') \begin{pmatrix} r' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r' = \frac{a'(1-e'^2)}{1+e'\cos f'}$$

基準軌道近傍の相対運動の線形近似式₂



$$r' = r + \frac{\partial r}{\partial a} \delta a + \frac{\partial r}{\partial e} \delta e + \frac{1}{n} \frac{\partial r}{\partial t_0} n \delta t_0$$

$$= r + \left(\frac{r}{a} - \frac{3 n t e \sin f}{2 \sqrt{1-e^2}} \right) \delta a - a \cos f \delta e + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \delta t_0 e \sin f$$

$$f' = f - \frac{3 n t a \sqrt{1-e^2}}{2 r^2} \delta a + \frac{(2 + e \cos f) \sin f}{1-e^2} \delta e + \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 + e \cos f)^2 \delta t_0$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{s/c} - \mathbf{r}_{ref}$$

$$= \begin{bmatrix} -a \delta e \cos f + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \delta t_0 e \sin f + \left(\frac{r}{a} - \frac{3 n t e \sin f}{2 \sqrt{1-e^2}} \right) \delta a \\ r(2 + e \cos f) \sin f \frac{\delta e}{1-e^2} + r \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0 (1 + e \cos f)^2 + r \delta \omega - \frac{3 n t a \sqrt{1-e^2}}{2 r} \delta a \\ r \delta i \sin(f - \Omega) \end{bmatrix}$$

相対位置ベクトルと内積 (円軌道)



$$e = 0, \quad \varpi = \omega + \Omega$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \delta a - a \delta e \cos(f - \varpi) \\ -\frac{3}{2}n(t - t_0)\delta a + 2a\delta e \sin(f - \varpi) + na\delta t_0 \\ a\delta i \sin(f - \Omega) \end{bmatrix}$$

$\delta a = 0$ として,

$$\alpha = \delta e \cos \varpi, \beta = \delta e \sin \varpi, \gamma = -n\delta t_0, \delta = \delta i \cos \Omega, \varepsilon = \delta i \sin \Omega \quad \text{とおくと}$$

$$\mathbf{r} = a \begin{bmatrix} -\alpha \cos f - \beta \sin f \\ 2\alpha \sin f - 2\beta \cos f + \gamma \\ \delta i \sin f - \varepsilon \cos f \end{bmatrix} \quad \text{となる。}$$

$$\frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{a^2} = p_0(\chi_i, \chi_j) + \sum_{k=1}^2 [p_k(\chi_i, \chi_j) \cos kf + q_k(\chi_i, \chi_j) \sin kf]$$

$$\chi = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$$

相似な幾何形状を維持する軌道 (円軌道)₁



$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0 \quad (\text{位置ベクトルが常に直交})$$

$$\rightarrow p_0(\chi_1, \chi_2) = 0, p_1(\chi_1, \chi_2) = 0, \dots, q_2(\chi_1, \chi_2) = 0$$

$$r_1 = r_2 \quad (\text{ノルムが常に等しい})$$

$$\rightarrow p_0(\chi_1, \chi_1) = p_0(\chi_2, \chi_2), \dots, q_2(\chi_1, \chi_1) = q_2(\chi_2, \chi_2)$$

変数は10個、条件式も10個 → 解ける

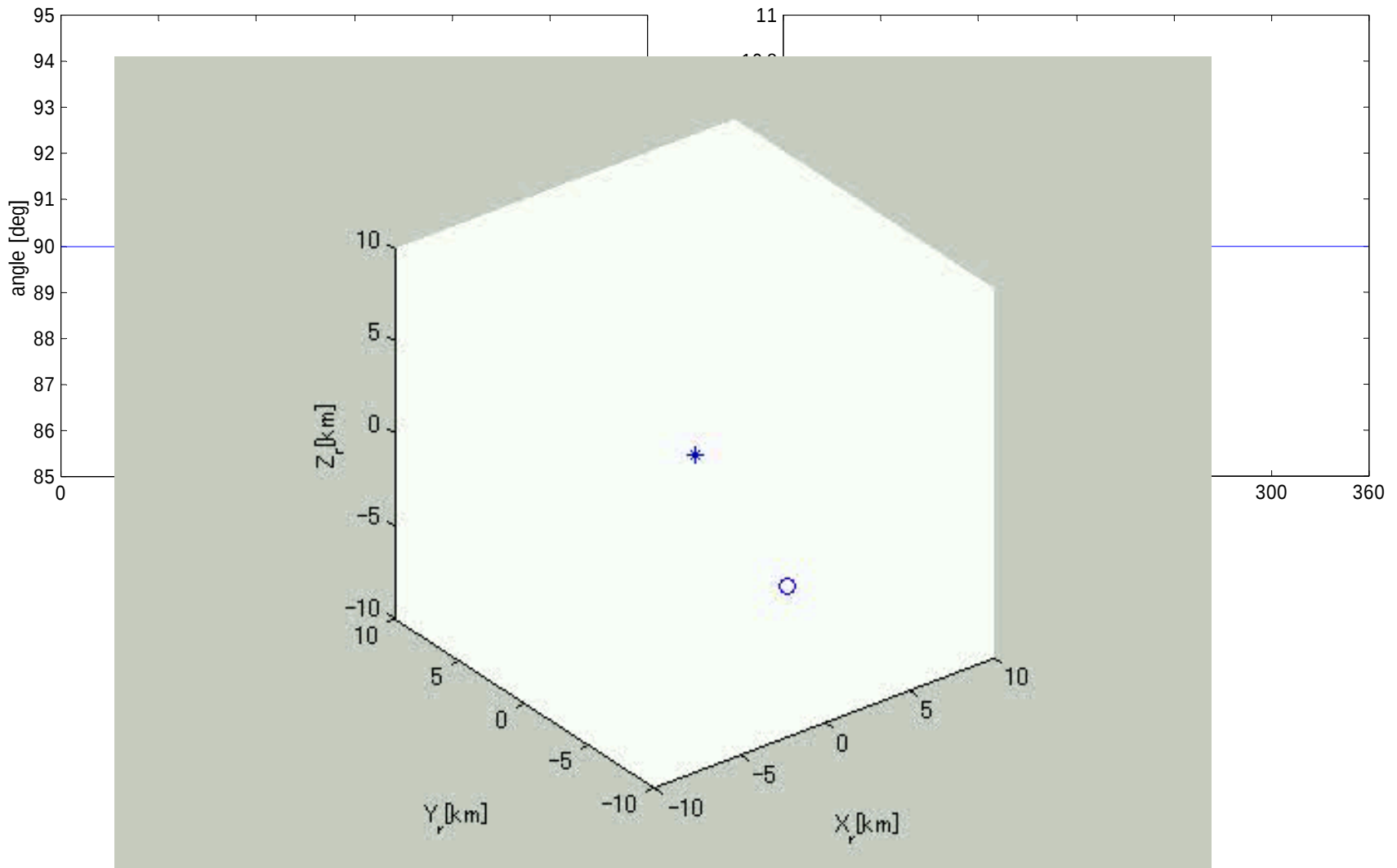
$$\alpha_1 = \delta e_1 \cos \varpi_1, \beta_1 = \delta e_1 \sin \varpi_1, \gamma_1 = 0,$$

$$\delta_1 = \mp \sqrt{3} \delta e_1 \sin \varpi_1, \varepsilon_1 = \pm \sqrt{3} \delta e_1 \cos \varpi_1$$

$$\alpha_2 = \delta e_1 \cos(\varpi_1 + \frac{\pi}{2}), \beta_2 = \delta e_1 \sin(\varpi_1 + \frac{\pi}{2}), \gamma_2 = 0,$$

$$\delta_2 = \mp \sqrt{3} \delta e_1 \sin(\varpi_1 + \frac{\pi}{2}), \varepsilon_2 = \pm \sqrt{3} \delta e_1 \cos(\varpi_1 + \frac{\pi}{2})$$

相似な幾何形状を維持する軌道 (円軌道)₂



相対位置ベクトルと内積 (楕円軌道)



$$\alpha = \frac{\delta e}{1 - e^2}, \beta = -\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0, \gamma = \delta \omega, \delta = \delta i \cos \Omega, \varepsilon = \delta i \sin \Omega \quad \text{とすると}$$

$$\mathbf{r} = r \begin{bmatrix} -\alpha(1 + e \cos f) \cos f - e\beta(1 + e \cos f) \sin f \\ \alpha(1 + e \cos f) \sin f - \beta(1 + e \cos f)^2 + \gamma \\ \delta \sin f - \varepsilon \cos f \end{bmatrix} \quad \text{となる}$$

$$\frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r^2} = p_0(\chi_i, \chi_j) + \sum_{k=1}^3 [p_k(\chi_i, \chi_j) \cos kf + q_k(\chi_i, \chi_j) \sin kf]$$

$$\chi = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$$

相似な幾何形状を維持する軌道 (楕円軌道)₁



$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0 \quad (\text{位置ベクトルが常に直交})$$

$$\rightarrow p_0(\chi_1, \chi_2) = 0, p_1(\chi_1, \chi_2) = 0, \dots, q_3(\chi_1, \chi_2) = 0$$

$$r_1 = r_2 \quad (\text{ノルムが常に等しい})$$

$$\rightarrow p_0(\chi_1, \chi_1) = p_0(\chi_2, \chi_2), \dots, q_3(\chi_1, \chi_1) = q_3(\chi_2, \chi_2)$$

変数は10個、条件式は14個 → 解けない

=>いくつかの式を無視して近似的な解を求める

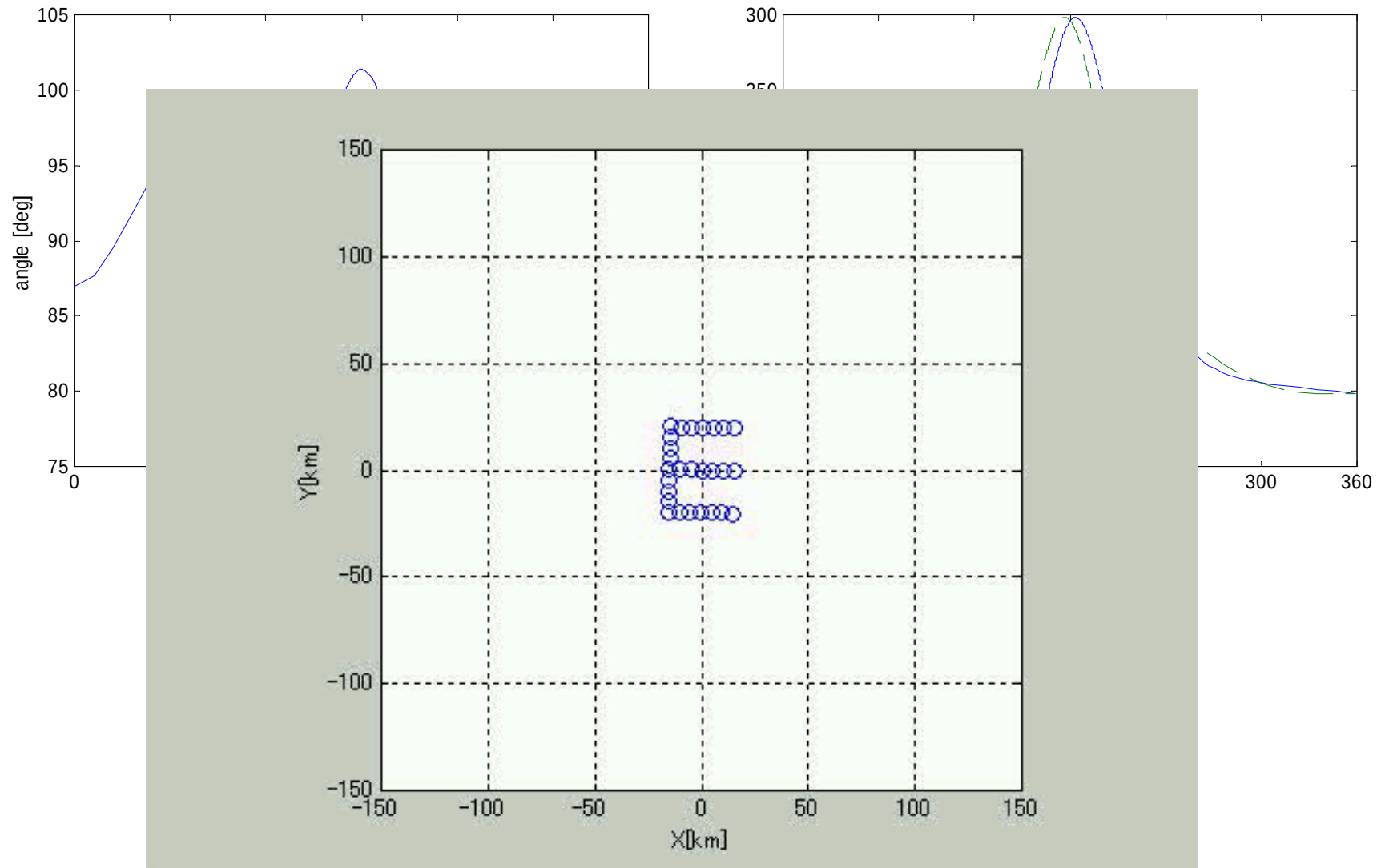
$$\alpha_1 = -\sigma \cos \phi, \beta_1 = -\frac{1}{e} \sigma \sin \phi, \gamma = -\frac{1}{e} \left(\frac{1}{4} e^2 + 1 \right) \sigma \sin \phi$$

$$\delta_1 = \mp \sqrt{3 - \frac{1}{4} e^2} \sigma \sin \phi, \varepsilon_1 = \mp \sqrt{3 - \frac{1}{4} e^2} \sigma \cos \phi$$

$$\alpha_2 = -\sigma \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right), \beta_1 = -\frac{1}{e} \sigma \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right), \gamma = -\frac{1}{e} \left(\frac{1}{4} e^2 + 1 \right) \sigma \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\delta_1 = \mp \sqrt{3 - \frac{1}{4} e^2} \sigma \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right), \varepsilon_1 = \mp \sqrt{3 - \frac{1}{4} e^2} \sigma \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

相似な幾何形状を維持する軌道 (楕円軌道)₂



距離が不変となる軌道₁



$$\frac{\mathbf{r}^T \mathbf{r}}{r^2} = p_0 + \sum_{k=1}^3 (p_k \cos kf + q_k \sin kf) = \frac{D^2}{r^2} \quad \text{となればよい}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad \text{より} \quad \frac{D^2}{r^2} = \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) \frac{D^2}{p^2} + \frac{2eD^2}{p^2} \cos f + \frac{e^2 D^2}{2p^2} \cos 2f$$

よって、条件は

$$p_0 = \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) \frac{D^2}{p^2}, \quad p_1 = \frac{2eD^2}{p^2}, \quad p_2 = \frac{e^2 D^2}{2p^2}, \quad p_3 = q_1 = q_2 = q_3 = 0$$

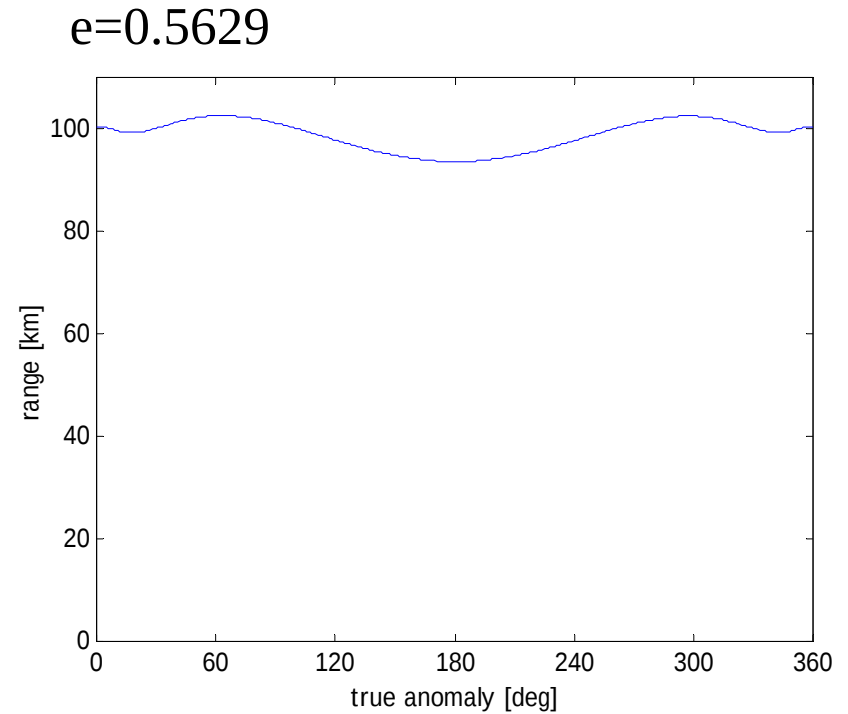
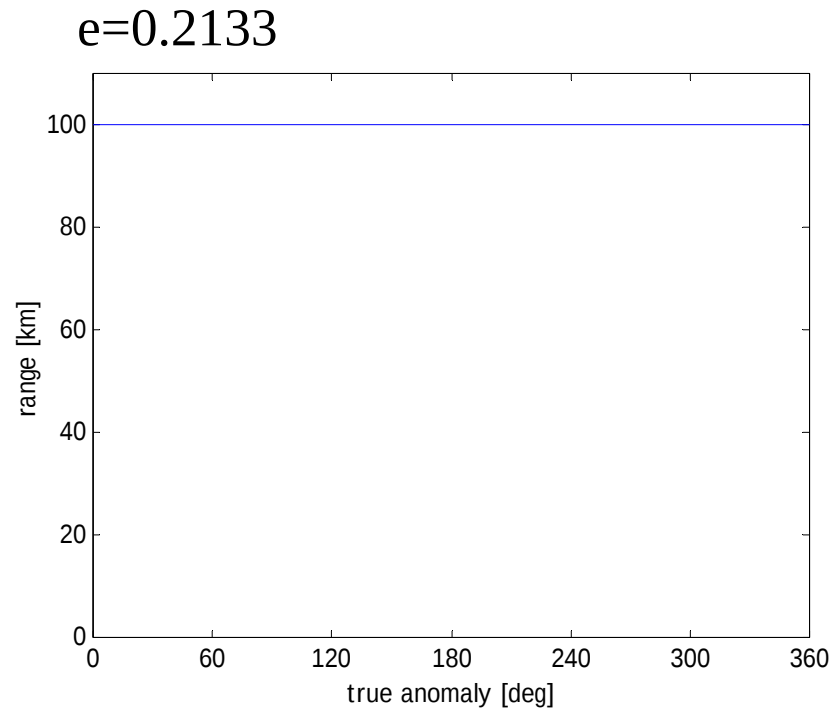
p_3 と q_3 に関する条件式を無視すると、

$$\alpha = 0, \quad \beta = \pm \frac{2D}{p} \frac{1}{\sqrt{7e^2 + 8 \pm 4\sqrt{3e^4 - 9e^2 + 4}}}, \quad \varepsilon = 0$$

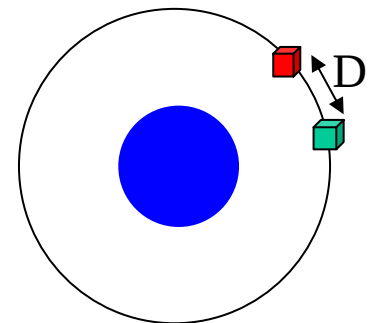
$$\gamma^2 = \left(\frac{3}{4}e^4 - \frac{9}{4}e^2 + 1\right)\beta^2, \quad \delta^2 = \left(-\frac{3}{4}e^4 + 3e^2\right)\beta^2$$

ただし、 $e < \pm \sqrt{\frac{1}{6}(9 + \sqrt{33})} \approx 0.7366$ のときのみ解が存在

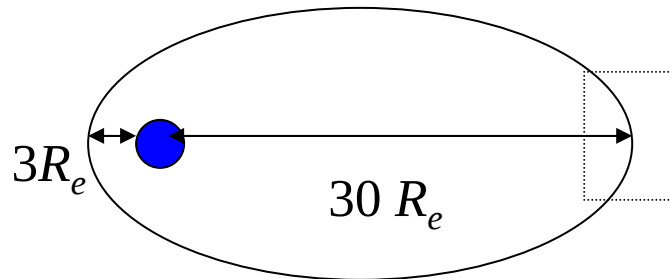
距離が不変となる軌道₂



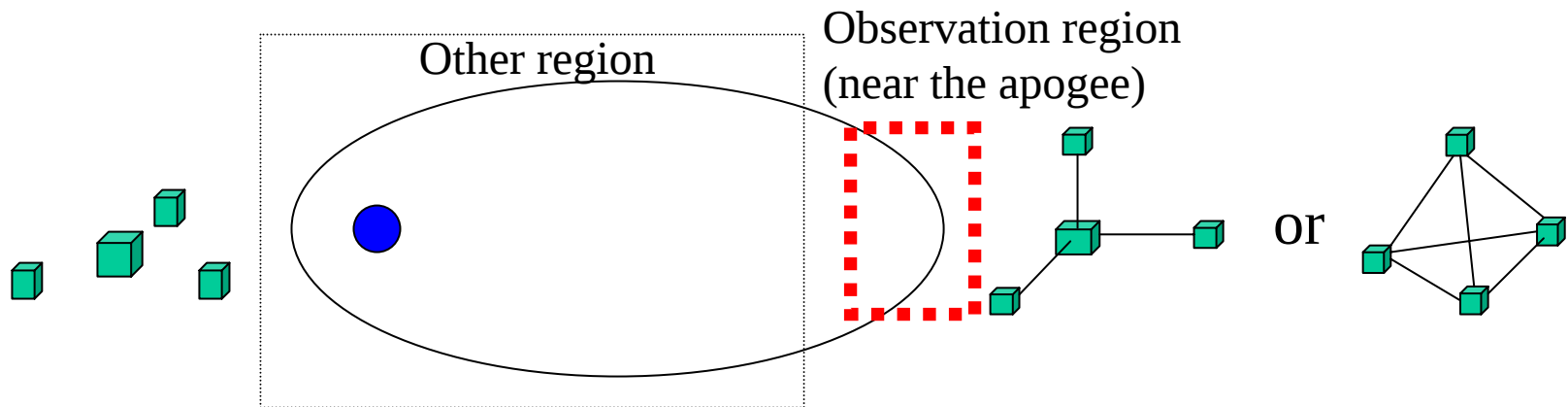
$e \rightarrow 0$ とすると、円軌道上で位相のみが異なる軌道



地心から $30R_e$ 程度離れた領域でNear-earth Reconnection
現象を観測



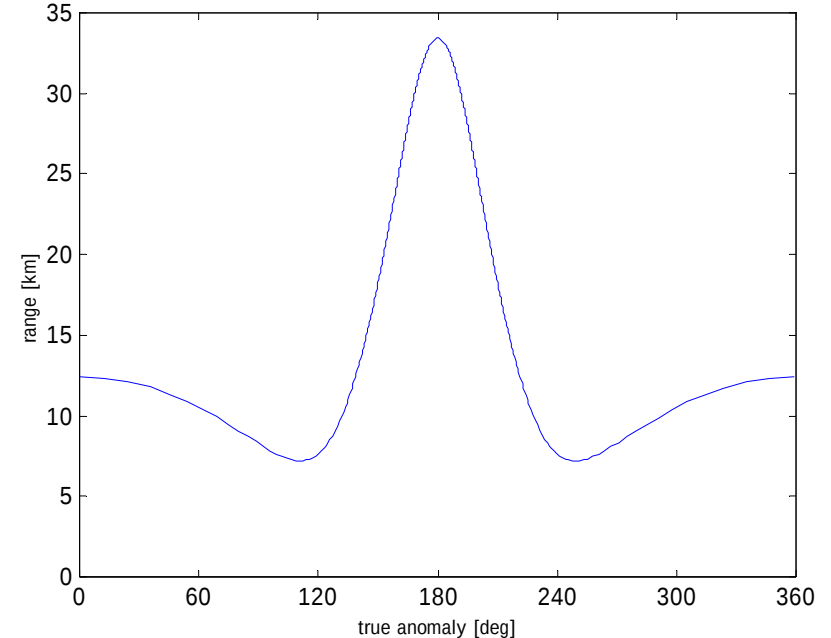
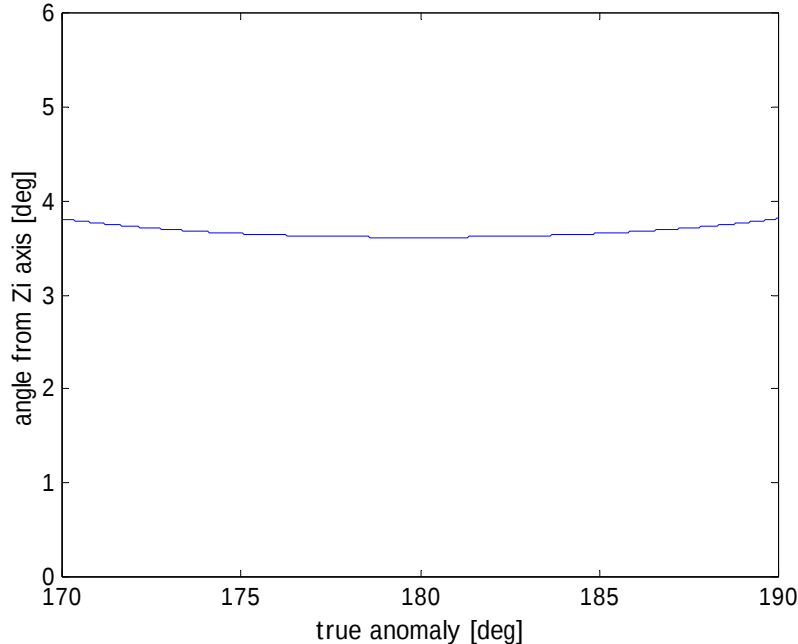
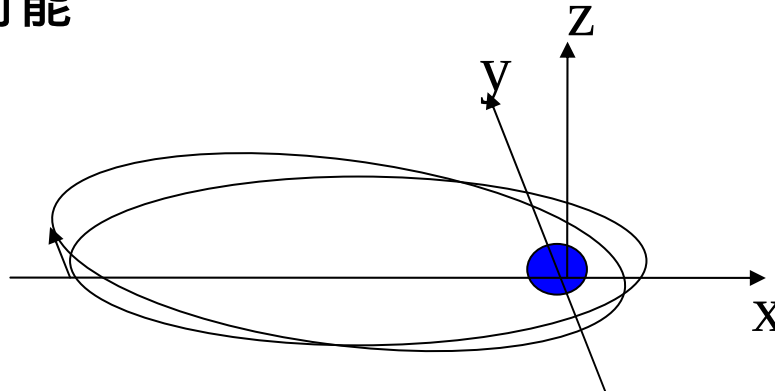
遠地点付近で高い観測性を維持する軌道



遠地点付近で直交する3基線を張る軌道₁



Z方向(面外方向)には離心率を適当に与えることで簡単に基線を張ることが可能



遠地点付近で直交する3基線を張る軌道₂



X-Y平面内の運動(慣性系)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_i = r \begin{bmatrix} \alpha(\cos^2 f - e \cos f - 2) + \beta(1 + e \cos f) \sin f - \gamma \sin f \\ \alpha \sin f \cos f - \beta(1 + e \cos f)(e + \cos f) + \gamma \cos f \end{bmatrix}$$

$$\alpha = -2R \cos \phi, \quad e\beta = -2R \sin \phi, \quad \beta - \gamma = kR \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_i = rR \left[(3 + 2e \cos f) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(2f + \pi - \phi) \\ \sin(2f + \pi - \phi) \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \cos(f - \pi/2) \\ \sin(f - \pi/2) \end{pmatrix} \right]$$

R : 相対運動の大きさを決定

ϕ, k : 相対運動の形を決定

ϕ, k の2パラメータのみを考えることで、軌道の設計が可能となる

遠地点での2つの衛星の相対位置ベクトルの対象性を考慮して、

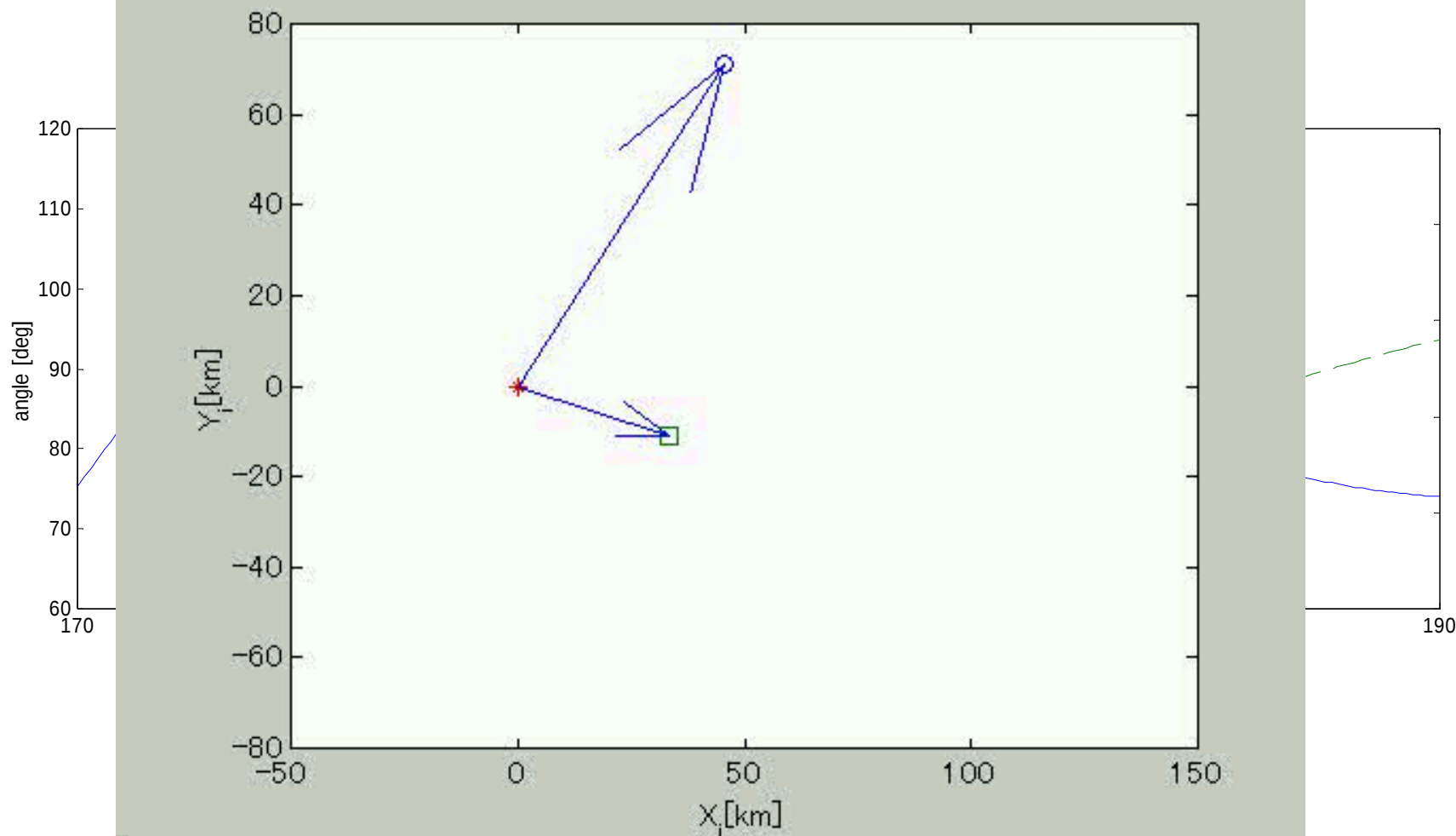
$$R_1 = R_2, \quad \phi_1 = -\phi_2, \quad k_1 = -k_2 \quad \text{とおく}$$

遠地点付近で直交する3基線を張る軌道₃



$k=0$ とする時、 φ に適当な値を与えてみる。

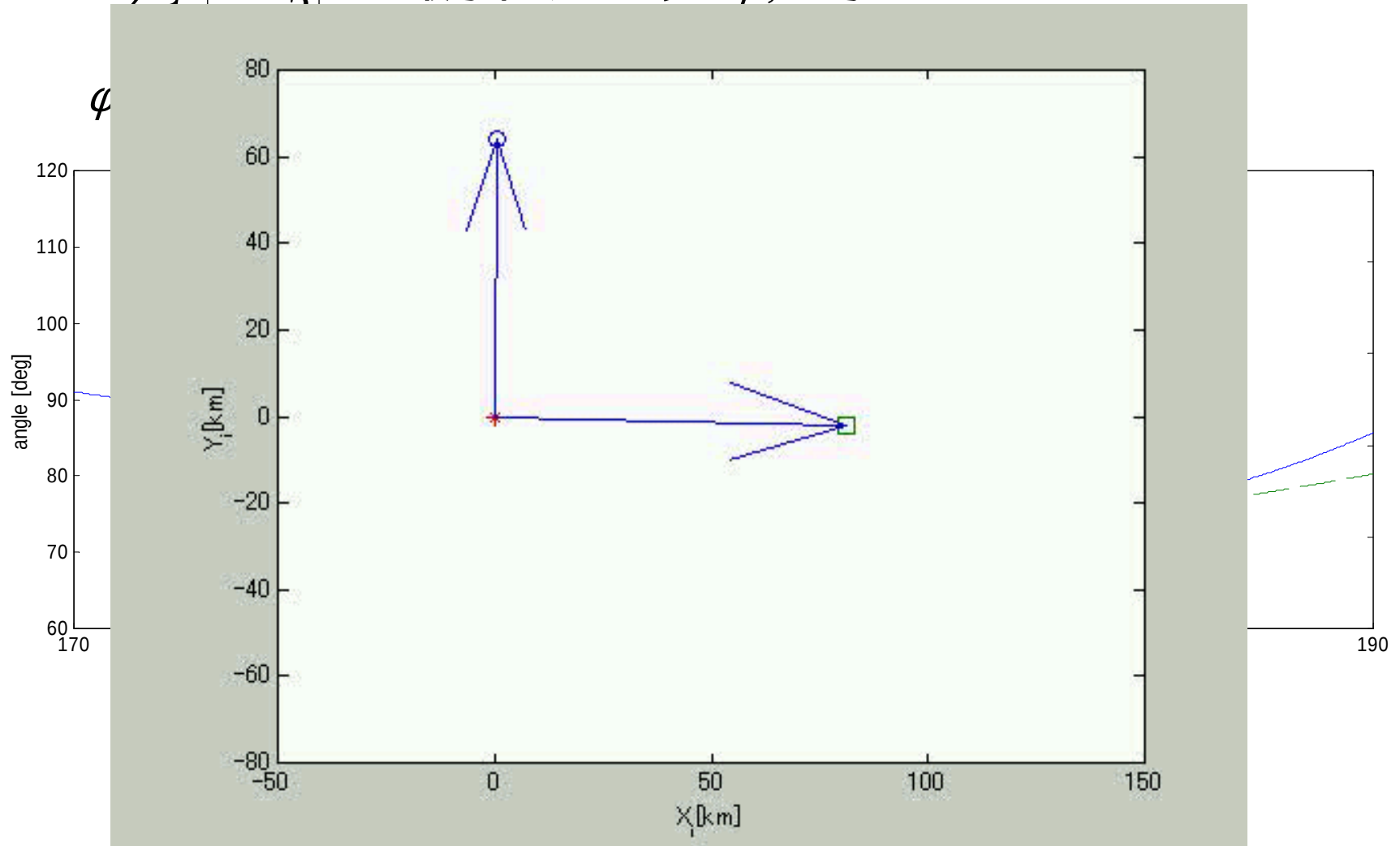
$$\varphi = 11.2517$$



遠地点付近で直交する3基線を張る軌道₄



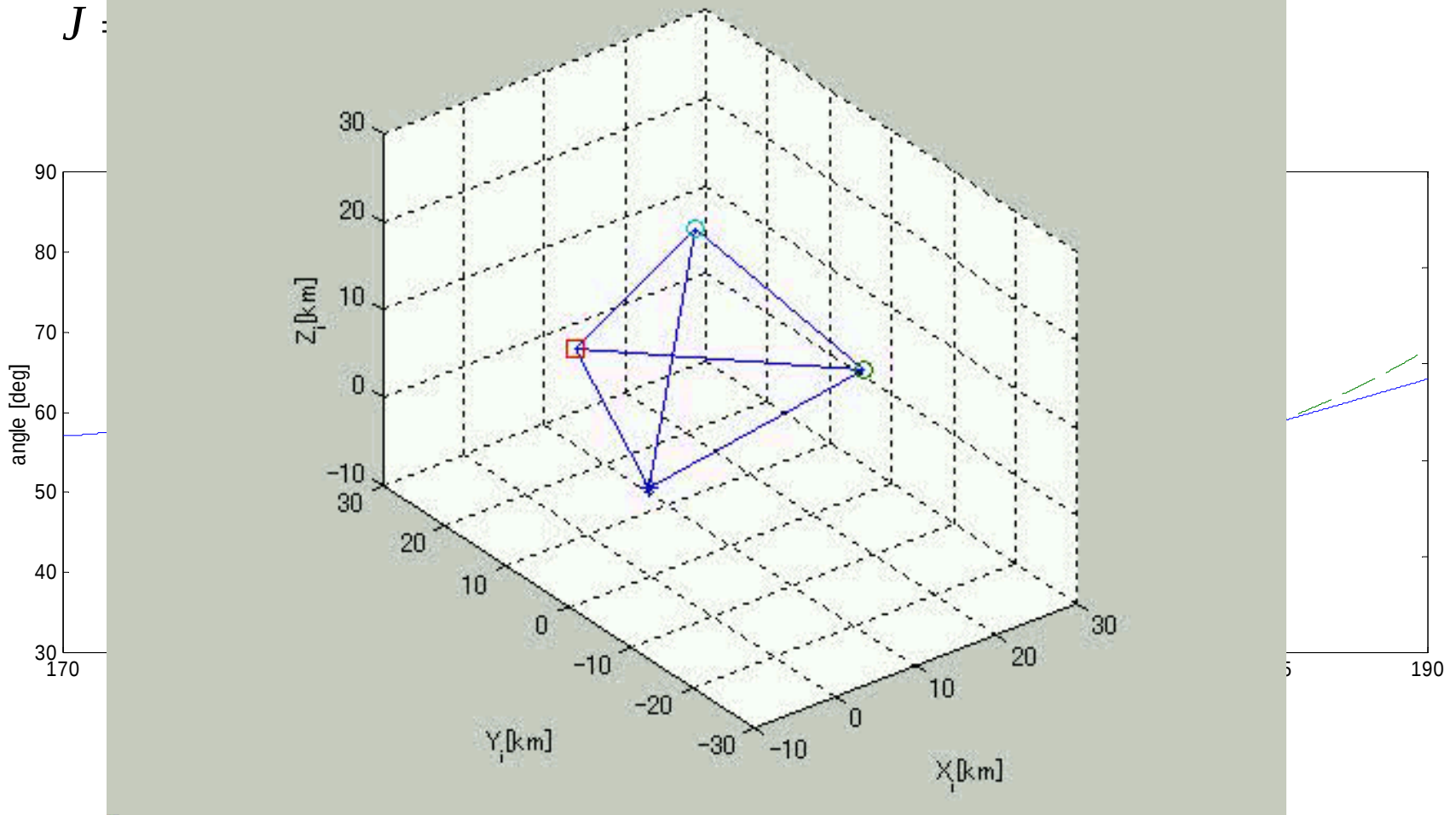
$$J = \sum_{\theta=0}^{190^\circ} \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \quad \text{を最小化するような } \varphi, k \text{ を求める}$$



遠地点付近で正四面体を構成する軌道



X-Y平面内に3衛星で正三角形を構成し、Z方向のもう1機の衛星と共に正四面体を構成する



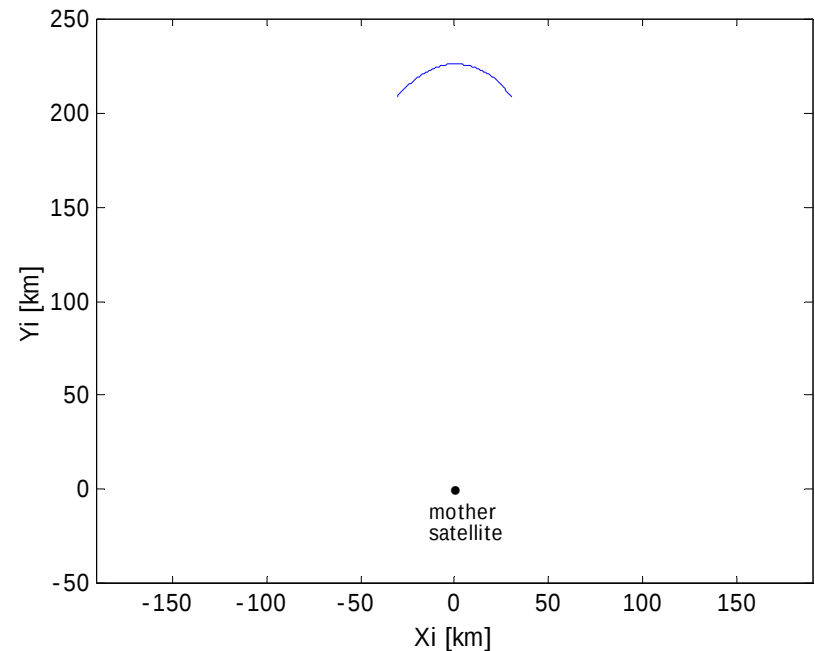
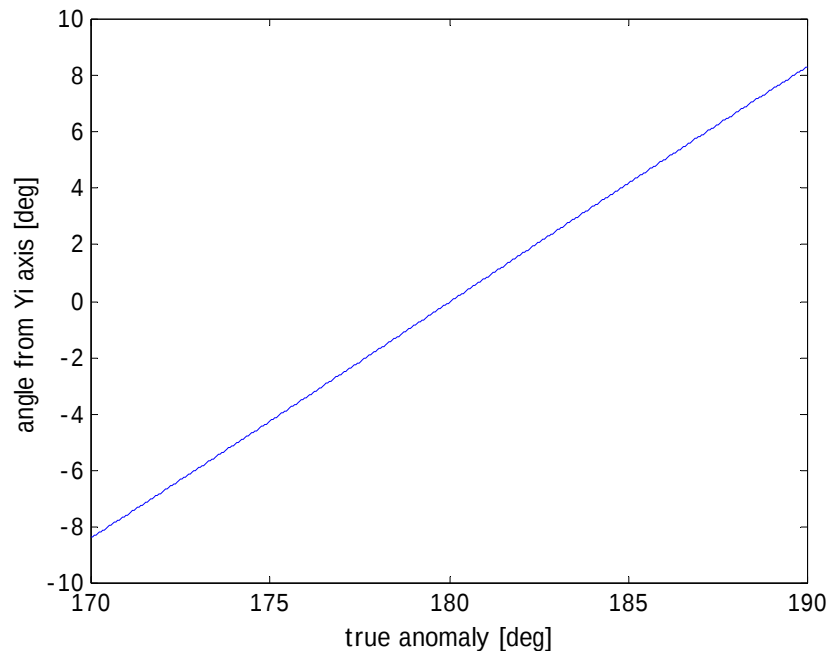
遠地点付近で X_i, Y_i, Z_i 方向に基線を張る軌道₁



Z_i 方向: 離心率を与えることで簡単に張ることが出来る

Y_i 方向

$\varphi=90[\text{deg}]$, $k=0$ とする

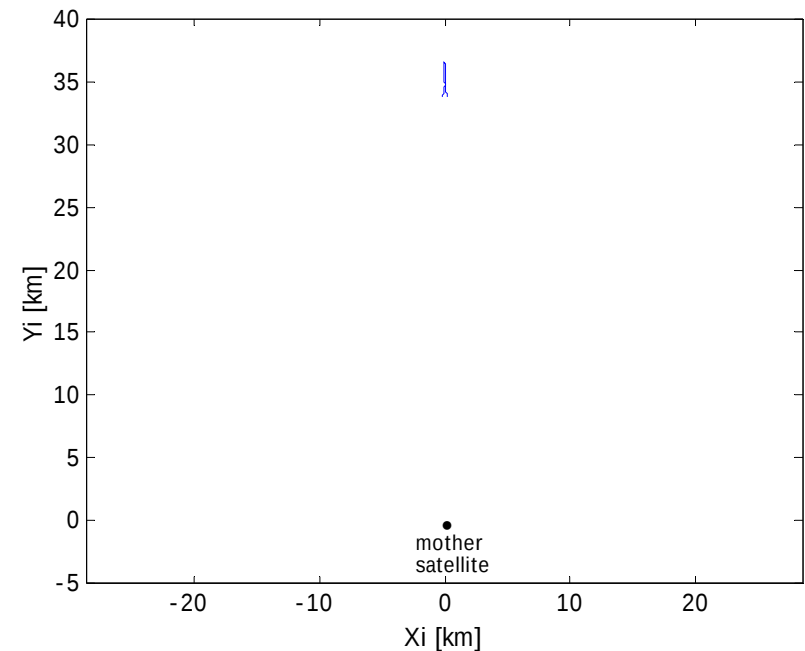
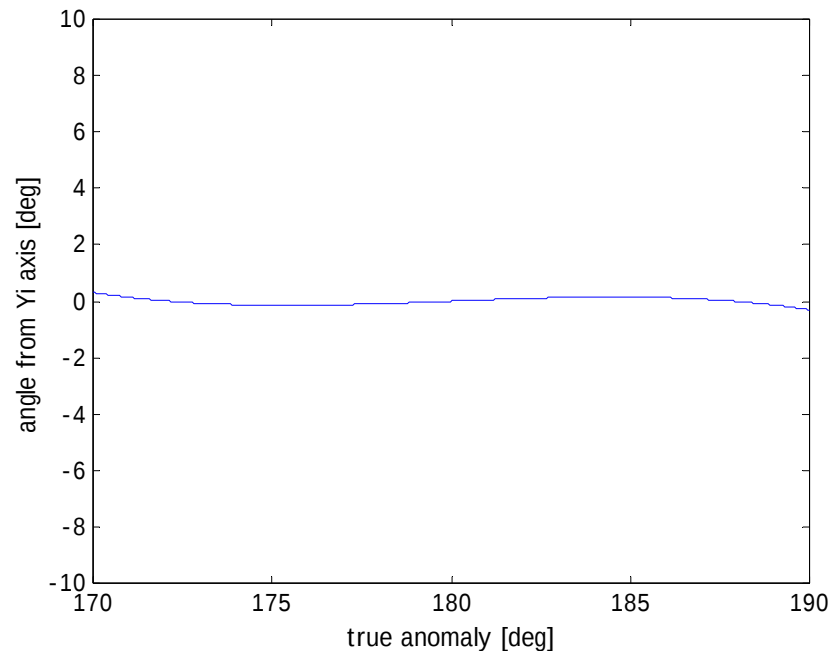


遠地点付近で X_i, Y_i, Z_i 方向に基線を張る軌道₂



k に値を与えても $f=180[\text{deg}]$ で子衛星が Y_i 軸上に存在する
→ 適当な k を与えることで Y_i 軸方向からのずれを抑えられるか調べる

$$\varphi=90[\text{deg}], k=-1.9812$$

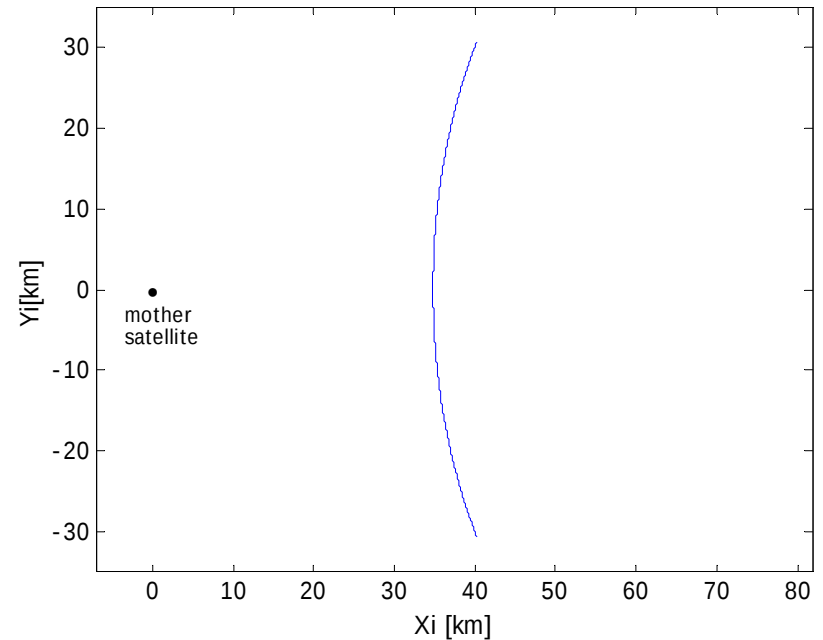
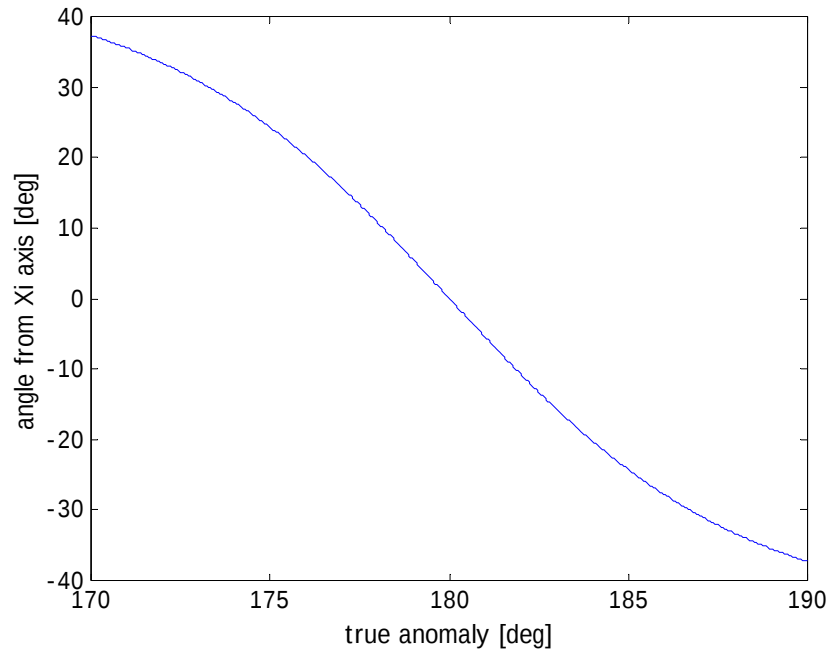


遠地点付近で X_i, Y_i, Z_i 方向に基線を張る軌道₃



X_i 方向

$\varphi=0[\text{deg}], k=0$ のとき

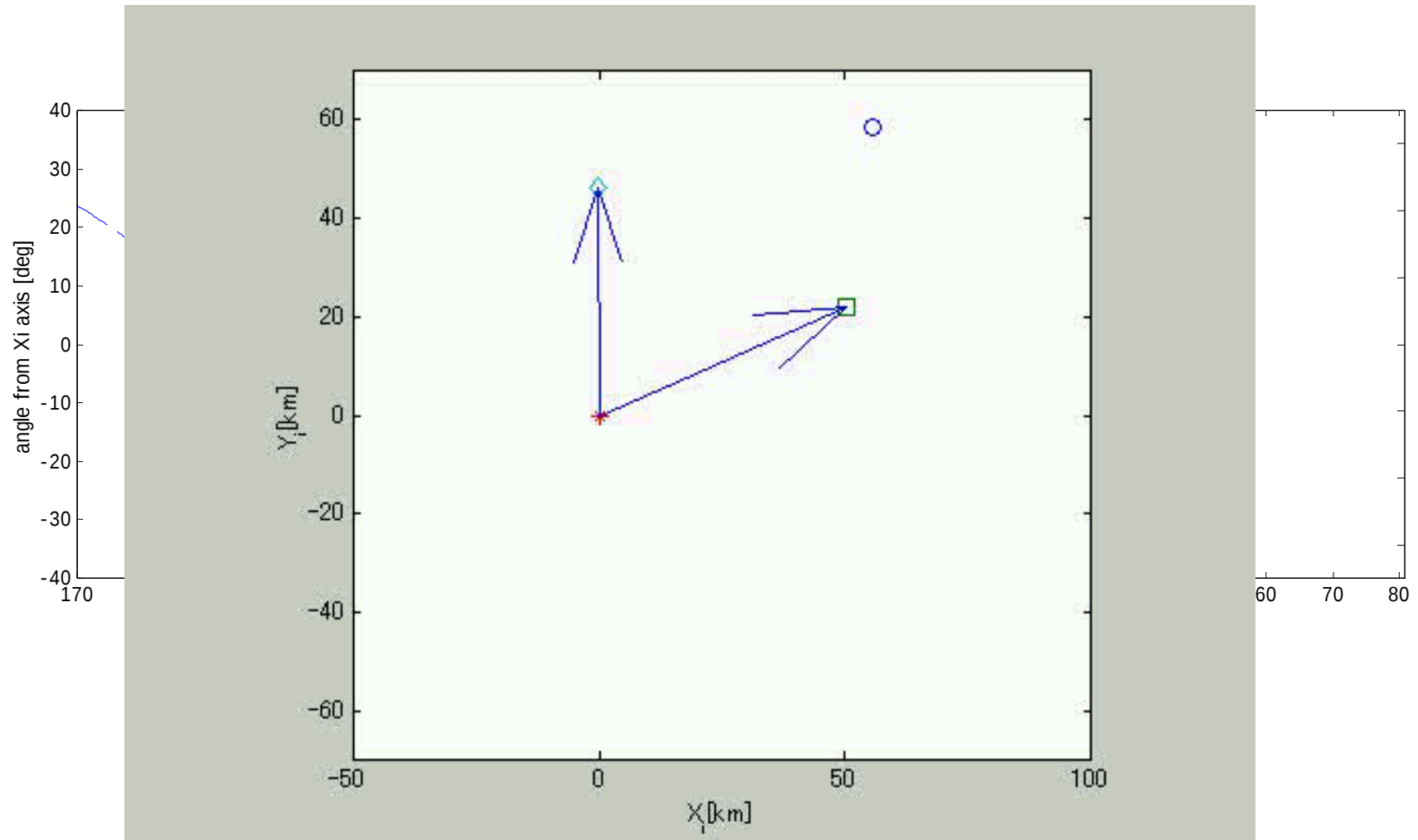


k に値を与えると遠点通過前後の位置ベクトルの対象性が崩れる
→ X_i 軸方向に基線を張るのは1機では不可能

遠地点付近で X_i, Y_i, Z_i 方向に基線を張る軌道⁴



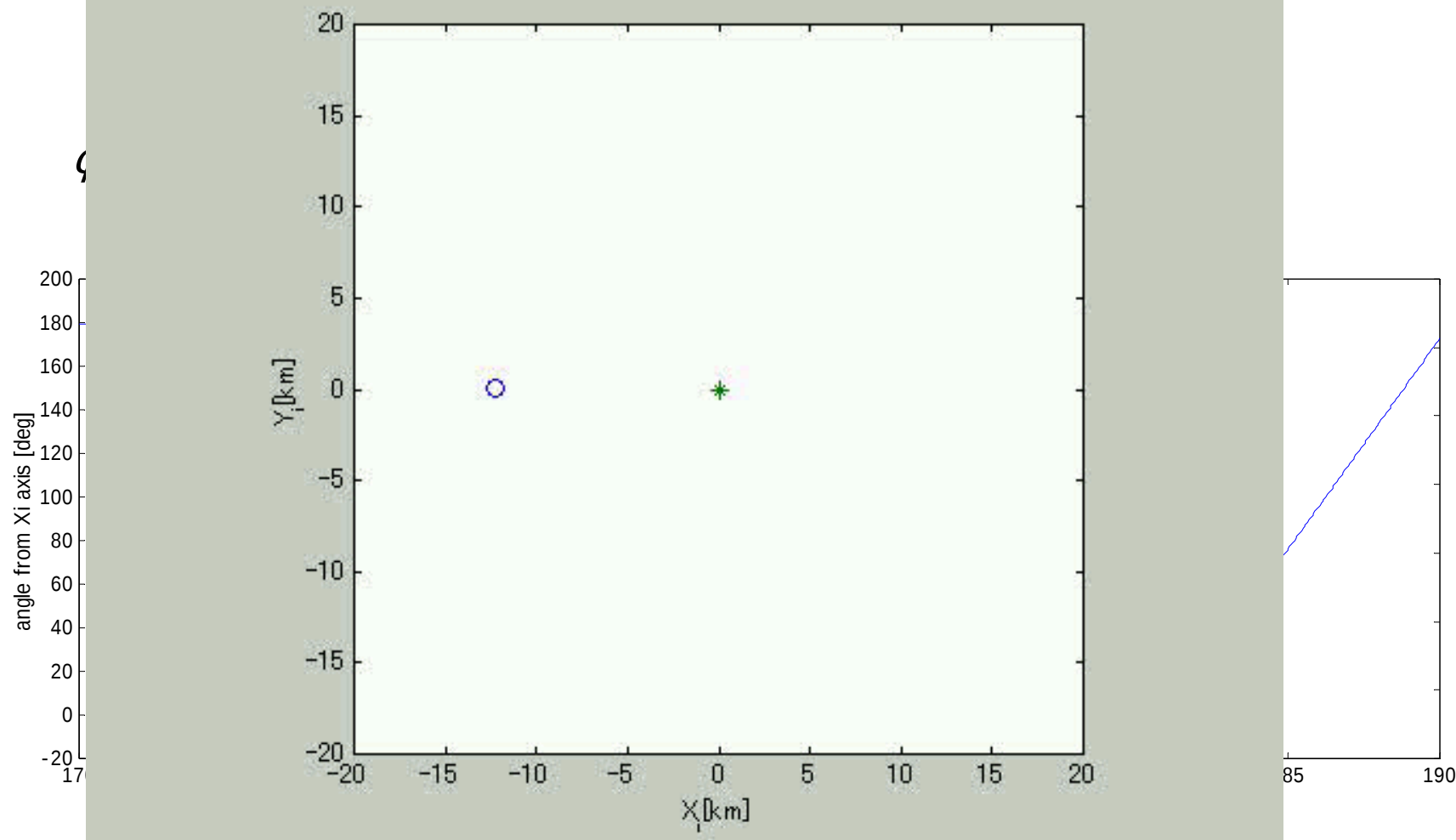
2機の衛星を利用して、1機が X_i 軸方向から大きく外れると、もう1機がカバーするように衛星を配置



遠地点付近で X_i, Y_i, Z_i 方向に基線を張る軌道₅



$$J = \sum_{\theta=0}^{190^\circ} |\theta| \quad \theta: X \text{ 軸からの角度}$$



まとめ(軌道)



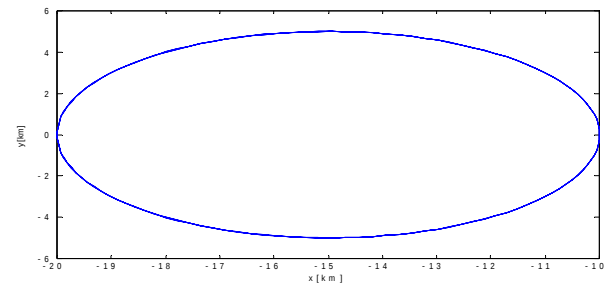
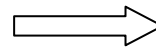
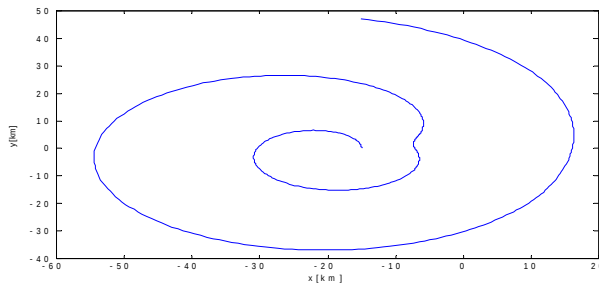
- 全周にわたって相似な幾何形状を維持する軌道や、衛星間距離を不変にする軌道が確認された
- 遠地点付近のみに注目すると、高い空間観測性を維持する軌道を設計することが可能

周期要素と非周期要素の制御

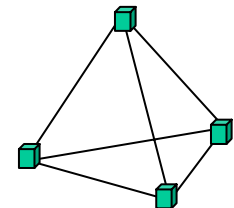
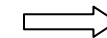
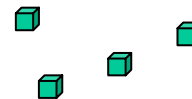


長半径 (周期要素) の制御 → フォーメーションの維持

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -a\delta e \cos f + \sqrt{\frac{\mu}{p}}\delta t_0 e \sin f + \left(\frac{r}{a} - \frac{3nte \sin f}{2\sqrt{1-e^2}} \right) \delta a \\ r(2 + e \cos f) \sin f \frac{\delta e}{1-e^2} + r \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \delta t_0 (1 + e \cos f)^2 + r \delta \omega - \frac{3nta\sqrt{1-e^2}}{2r} \delta a \\ r \delta i \sin(f - \Omega) \end{bmatrix}$$



長半径以外の軌道要素の制御
→ フォーメーションの形を変えること



長半径の制御₁



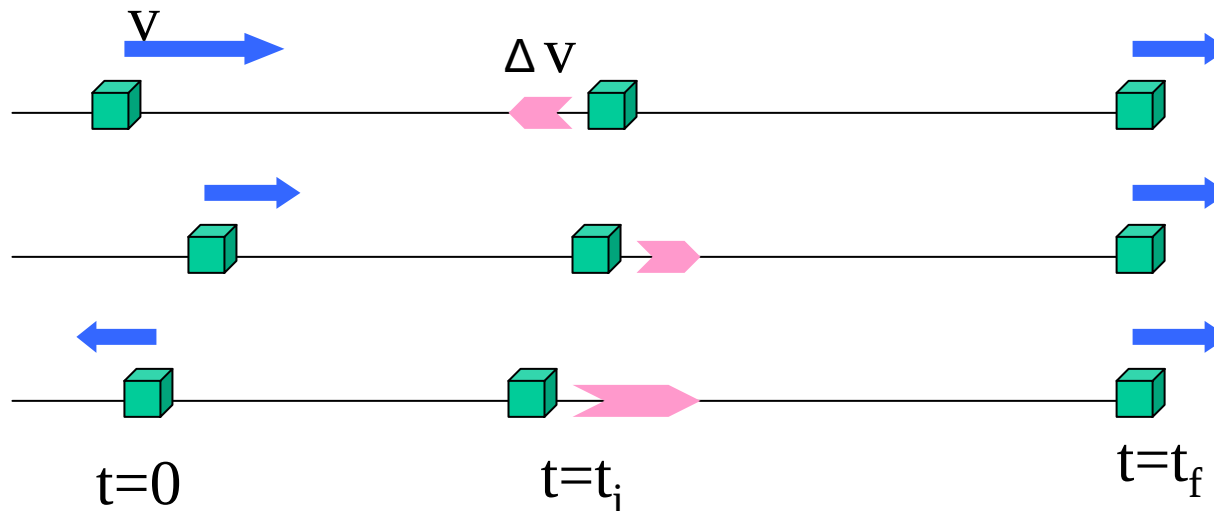
長半径が異なる 平均運動が異なる

→ 軌道上を進む速度が異なる → 位相がずれていく → フォーメーション崩壊

平均運動 → 速度

位相 → 位置

とみなす



数ステップ(周回ごと)の増減速で、レールの上を直線運動する物体の速度と位置を揃える問題へと帰着できる

長半径の制御₂



拘束条件

$$v_f^i = v_f^j$$

$$x_f^i = x_f^j \quad or \quad x_f^i - x_f^j = c_{ij}$$

速度(長半径)をそろえる

位相を決められた値にする or
決められた位相差にする

評価関数

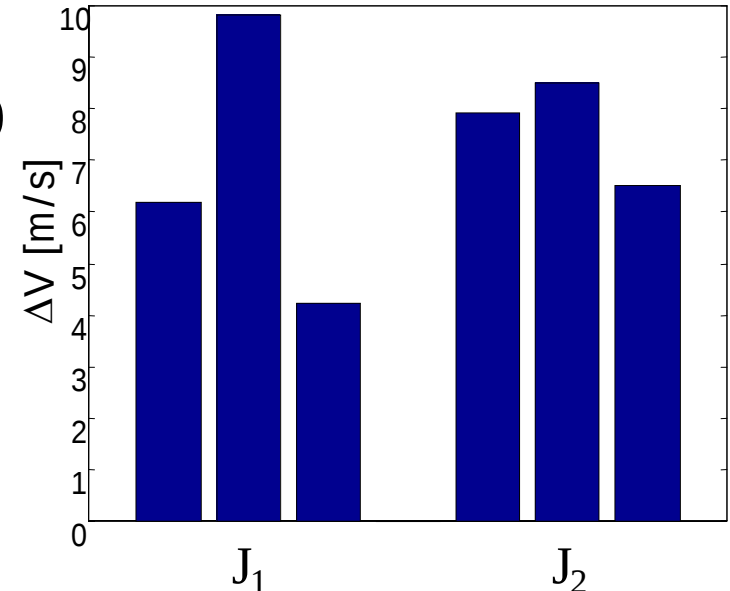
$$J_1 = \sum_i^n \| \mathbf{V}_i \|$$

$$J_2 = w_1 \sum_i^n \| \mathbf{V}_i \|^2 + w_2 \sum_j^{n-1} (\| \mathbf{V}_j \|^2 - \| \mathbf{V}_{j+1} \|^2)$$

$\mathbf{V}$:history of ΔV

n :the number of satellites

w :weight



長半径の制御₃



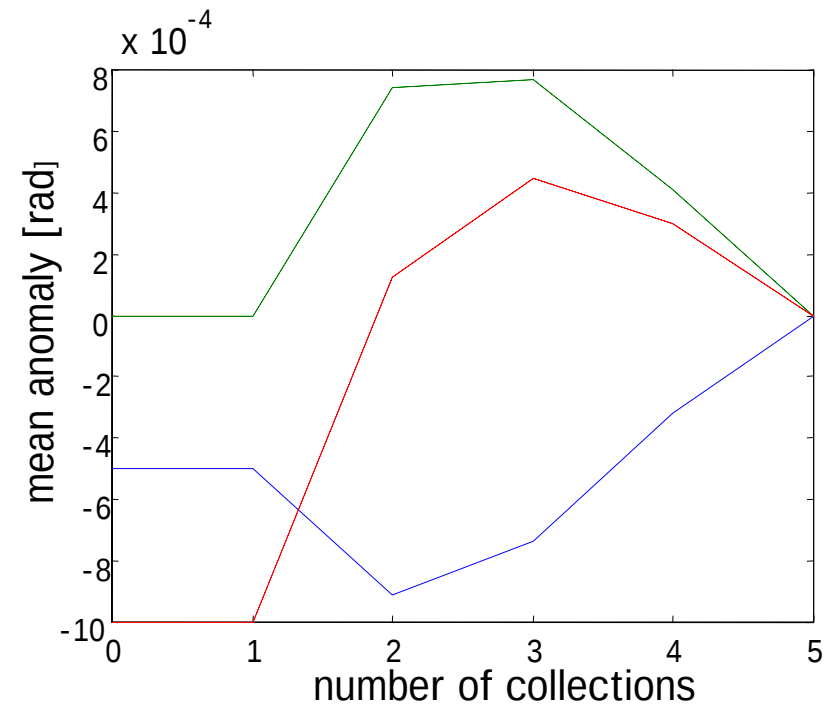
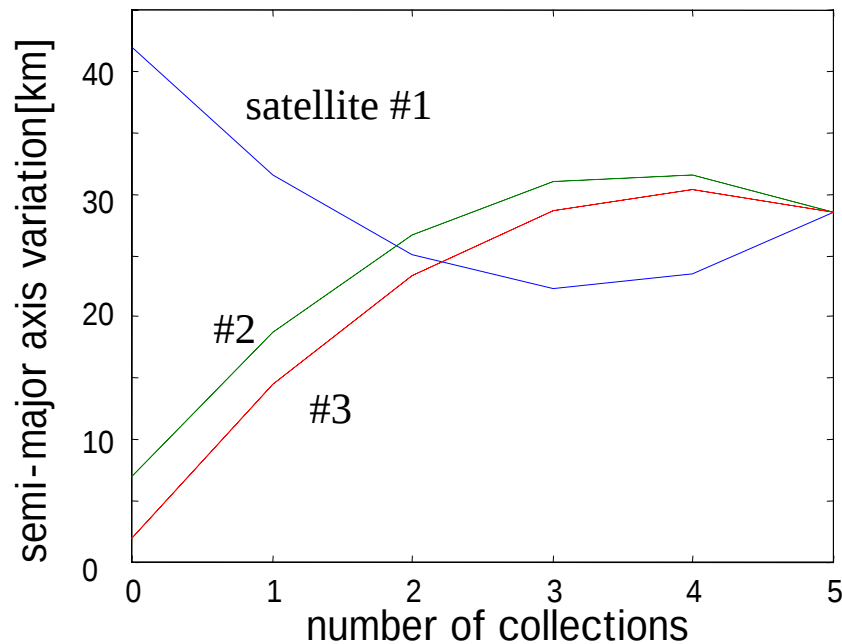
毎近地点通過時に長半径を制御する

◆satallite1: $a_0 = 105252$, $M_0 = M_r - 0.0005[\text{rad}]$

◆satallite2: $a_0 = 105217$, $M_0 = M_r$

◆satallite3: $a_0 = 105212$, $M_0 = M_r - 0.001$

M_r :リファレンス軌道の
mean anomaly



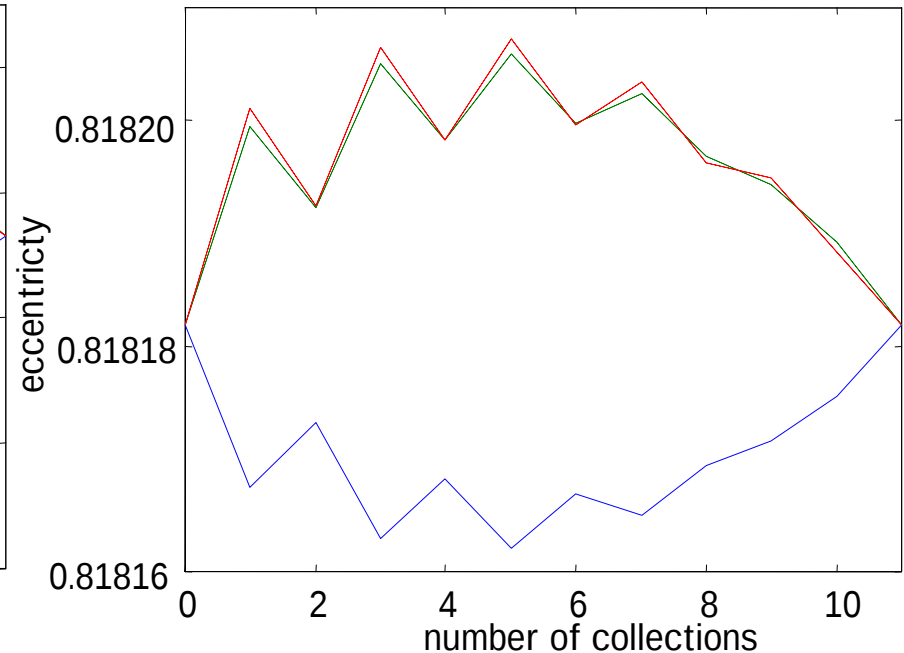
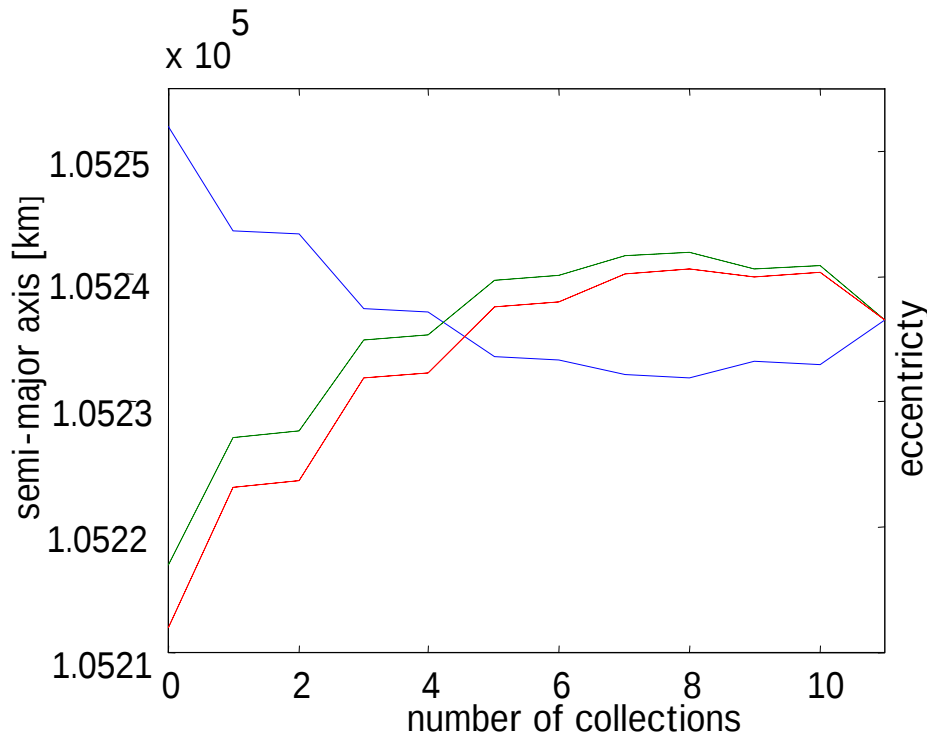
長半径の制御₄



近地点で制御すると、長半径と共に離心率も変化する



近地点と遠地点通過時に制御を行い、長半径と位相と離心率を同時に制御することが可能



離心率と昇交点赤径の変化

$$\Delta i = \frac{r \cos(f + \omega)}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \Delta V$$

ΔV : out of plane delta V

$$\Delta \Omega = \frac{r \sin(f + \omega)}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \Delta V$$

$\sin(f + \omega) = 0$ を満たすような f の地点で制御を行えば、離心率のみを変化させることが可能

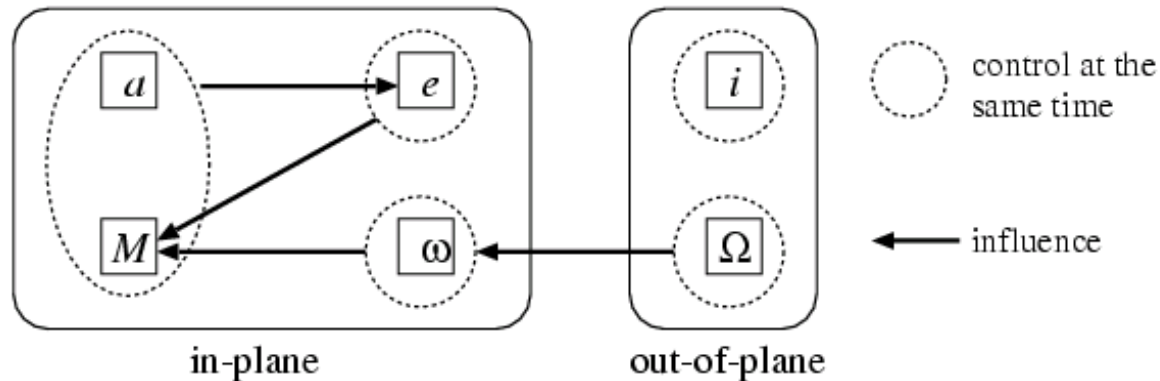
$\cos(f + \omega) = 0$ を満たすような f の地点で制御を行えば、昇交点赤径のみを変化させることが可能

制御すべき地点と制御量があらかじめ分っているため、衛星の運用が非常に楽になる

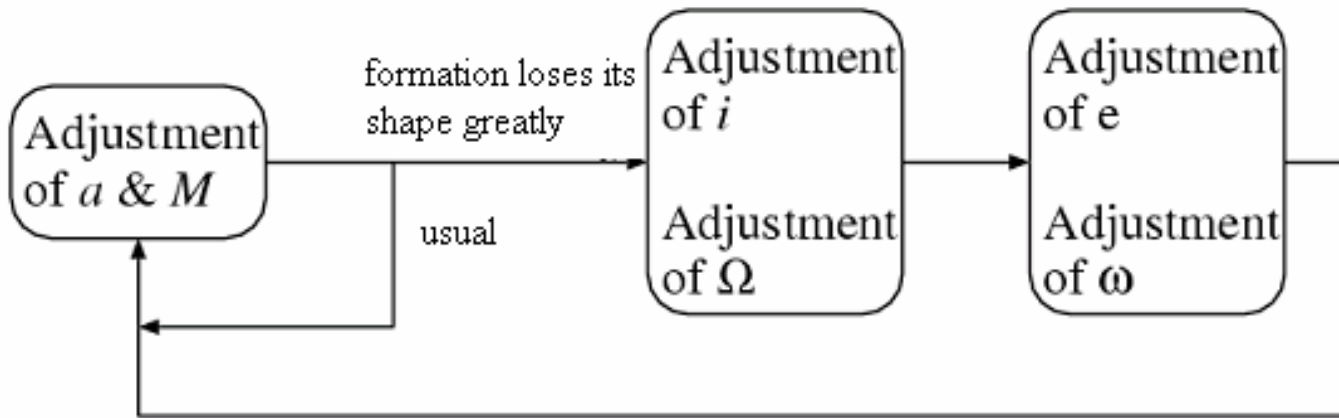
その他の軌道要素の制御₂



軌道要素を制御するときのカップリング



制御の順番



その他の軌道要素の制御₃



軌道要素の制御に必要な ΔV (例)

Before control

a : 105237[km], e : 0.818182, i : 30[deg],

Ω : 90[deg], ω : 270[deg], M_0 : 0[deg]

$$\Delta V_a = 0.002924 \Delta a \quad [\text{m/s}] (@\text{Perigee})$$

$$\Delta V_M = 32.65 \Delta M / N \quad [\text{m/s}] (@\text{Perigee}) \quad N : \text{the number of revolution}$$

$$\Delta V_e = 1692.5 \Delta e \quad [\text{m/s}] (@\text{Perigee \& Apogee})$$

$$\Delta V_\omega = 1829.2 \Delta \omega \quad [\text{m/s}] (@f = \pm 145[\text{deg}])$$

$$\Delta V_i = 1946.2 \Delta i \quad [\text{m/s}] (@f = \pm 145[\text{deg}])$$

$$\Delta V_\Omega = 307.7 \Delta \Omega \quad [\text{m/s}] (@\text{Apogee})$$

モンテカルロシミュレーションの結果、遠地点において100[km]オーダーの軌道変更(面内、面外)を行う場合、約4[m/s]の ΔV が必要
(最適2インパルス移行では約2[m/s]が必要)

まとめ (制御)



- 長半径の制御はフォーメーションの維持に不可欠である
- その他の軌道要素は、制御位置と制御量を適当にとることで独立に制御することが可能である

今後の課題



- 制御時の衝突回避
- 外乱の検討
- 衛星数が多くなったときの航法
- 情報が制限されたときの航法 等